इण्टरमीडिएट परीक्षा वर्ष 2023–24
गणित प्रतिदर्श प्रश्न पत्र
केवल प्रश्नपत्र

समय– तीन घण्टे 15 मिनट | पूर्णांक–100

निर्देश– प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित है।

नोट –

1. इस प्रश्न पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
2. सभी प्रश्न अनिवार्य है।
3. प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्ट उल्लेख है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।
4. प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सम्मुख अंकित है।
5. प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए। जो प्रश्न न आता हो, उसमें व्यर्थ समय नष्ट न कीजिए।

1 सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए –

(क) मान लीजिए कि $f(x)=3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f:R\rightarrow R$ है। सही उत्तर चुनिए। **01**

(i) f एकैकी आच्छादक है। (ii) f बहुएक आच्छादक है।

(iii) f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है। (iv) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

(ख) यदि समुच्चय N में R={(a,b): a=b-2, b>6} द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए – **01**

(i) $(2, 4) \in R$ (ii) $(3, 8) \in R$

(iii) $(6, 8) \in R$ (iv) $(8, 7) \in R$

(ग) समाकलन $\int xe^x dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **01**

(i) e^x (ii) $(x+1)e^x$ (iii) $(x-1)e^x$ (iv) $\frac{x^2}{2}e^x$

(घ) अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+y=0$ की कोटि है – 01

(i) 2 (ii) 1 (iii) 0 (iv) परिभाषित नहीं है।

(ङ) यदि सदिश $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ और $\hat{i}-4\hat{j}+\lambda\hat{k}$ परस्पर लम्ब हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए – 01

(i) 3 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 0

2. सभी खण्ड कीजिए –

(क) $Cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। 01

(ख) दिखाइए कि फलन $f(x)=|x|, x=0$ पर संतत है। 01

(ग) अवकल समीकरण $xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$ की कोटि एवं घात बताइए। 01

(घ) दो बिन्दुओं (–2,4,–5) और (1,2,3) को मिलाने वाली रेखा की दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए। 01

(ङ) यदि $P(A)=\frac{7}{13}$, $P(B)=\frac{9}{13}$ और $P(A\cap B)=\frac{4}{13}$ तो $P(A/B)$ का मान ज्ञात कीजिए। 01

3. सभी खण्ड कीजिए –

(क) यदि $A=\{1,2\}$ तथा $B=\{3,4\}$ है। तो A और B में सम्बन्धों की संख्या ज्ञात कीजिए। 02

(ख) यदि $y=A\sin x+B\cos x$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ है। 02

(ग) सदिशों $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ और $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 02

(घ) यदि $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ है तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए। 02

4. सभी खण्ड कीजिए –

(क) दिखाइए कि प्रदत्त फलन $f(x)=7x-3$, R पर एक वर्धमान फलन है। 02

(ख) सदिश $(\bar{a}+\bar{b})$ और $(\bar{a}-\bar{b})$ में से प्रत्येक के लम्बवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $\bar{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\bar{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ है। **02**

(ग) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएं $\bar{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ और $\bar{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा दी गयी है। **02**

(घ) A और B ऐसी घटनाएँ दी गई हैं जहाँ $P(A)=\frac{1}{2}$ $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$ तथा $P(B)=P$, P का मान ज्ञात कीजिए। यदि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी है। **02**

5. सभी खण्ड कीजिए –

(क) सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय Z में R={(a, b) : संख्या 2, (a-b) को विभाजित करती है } द्वारा प्रदत्त संबंध एक तुल्यता संबंध है। **05**

(ख) यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ है। **05**

(ग) फलन $(\sin x)^{\cos x}$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए। **05**

(घ) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **05**

(ङ) रेखाओं $\bar{r}=\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ और $\bar{r}=3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। **05**

6. सभी खण्ड कीजिए –

(क) दिखाइए कि $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & \text{यदि } x\neq 0\\ 0, & \text{यदि } x=0\end{cases}$, x=0 पर असंतत है। **05**

(ख) x=0 एवं x= 2π के मध्य वक्र y=cos x से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **05**

(ग) P का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2P}=\frac{z-3}{2}$

और $\frac{7-7x}{3P}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$

परस्पर लम्ब हों। 05

(घ) निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत $z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए। 05

$x + y \geq 8, \quad 3x + 5y \leq 15, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$

(ङ) एक छात्रावास में 60% विद्यार्थी हिंदी का, 40% अंग्रेजी का और 20% दोनों अखबार पढ़ते हैं।

(i) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिंदी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है। $2\frac{1}{2}$

(ii) यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ती है तो उसके अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। $2\frac{1}{2}$

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए।

(क) यदि $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

हो तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए। 08

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$3x - 2y + 3z = 8$
$2x + y - z = 1$
$4x - 3y + 2z = 4$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 08

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए।

(क) सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अन्तर्गत विशालतम शंकु का आयतन, गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है। 08

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 08

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए।

(क) $\int_{\sigma}^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 08

(ख) $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 08